



فصل سوم

روابط طولی در مثلث





جاهای خای را با عبارت های مناسب پر کنید:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر به برابر است با اندازه (۱)

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه دایره محیطی مثلث. (۲)

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر به زاویه روبه‌رو به آن برابر است با نتیجه (۳)

در قضیه کسینوس ها، مربع هر ضلع برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای (۴)

در مثلث ABC، اگر $a=10$ ، $b=8$ و زاویه $\hat{C}=120^\circ$ باشد، طول ضلع c برابر است با (۵)

در مثلث ABC، اگر $a=6$ ، $b=8$ و زاویه $\hat{A}=30^\circ$ باشد، سینوس زاویه B برابر است با (۶)



درست یا نادرست بودن هر یک از عبارات های زیر را تعیین کنید.

۱- در قضیه سینوس ها، نسبت هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن برابر با قطر دایره محاطی مثلث است.

۲- در مثلث ABC، اگر $a=10$ ، $b=8$ و $c=12$ باشد، مساحت آن برابر با $15\sqrt{7}$ است.

۳- در مثلث ABC اگر نیمساز AD را رسم کنیم آنگاه داریم: $AD^2 = AB \times AC - BD \times BC$

۴- طبق قضیه هرون قضیه هرون، مساحت مثلث با اضلاع a ، b و c برابر است با $P(P-a)(P-b)(P-c)$

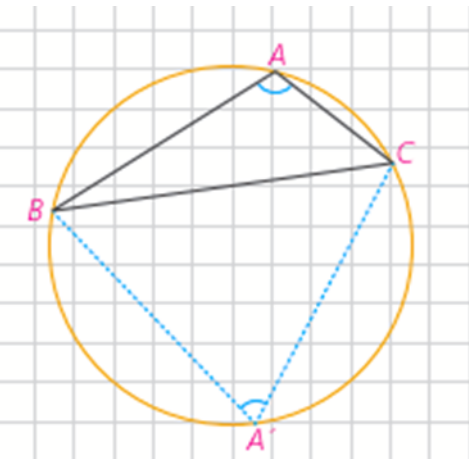
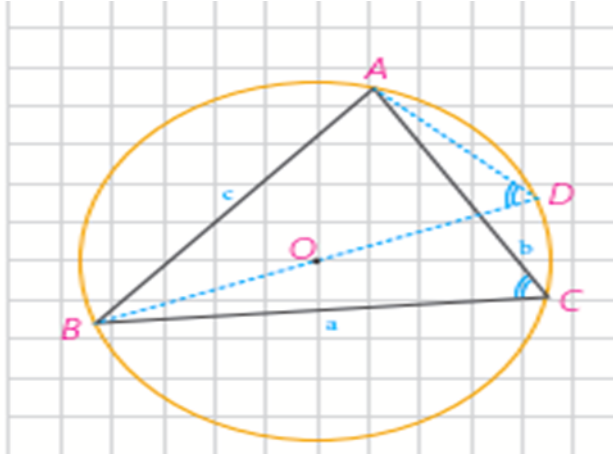
۵- در مثلث ABC اگر نیمساز AD را رسم کنیم آنگاه داریم: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CB}$



پویش علمی
ماندگار البرز



پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز



قضیه سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع $AB=c$ و $AC=b$ ، $BC=a$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} =$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) و دایره محیطی، آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم.

قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم.

۱- زوایای \hat{C} و \hat{D} چرا با هم برابرند؟

اندازه آنها برابر است با نصف

۲- چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داریم:

$$\sin C = \sin D \text{ و } \sin D = \frac{a}{2R} \Rightarrow \sin C = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin C} = 2R$$



مثال ۱: در مثلث ABC ، $BC=10\text{ cm}$ و $\hat{A}=12^\circ$ و $AC=\frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زوایای \hat{B} و \hat{C} را به دست آورید.

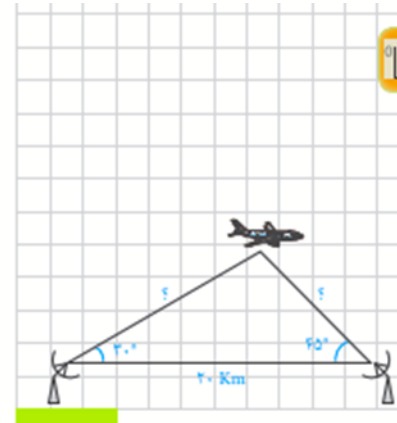
حل: به کمک قضیه سینوس‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 12^\circ} = 2R \text{ و } \sin 12^\circ = \sin(18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ و } R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

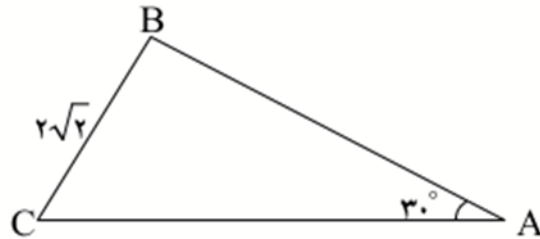
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin B = \frac{10\sqrt{6}}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B=45^\circ \text{ یا } 135^\circ \text{ و } \hat{A}=12^\circ \Rightarrow \hat{B}=45^\circ \Rightarrow \hat{C}=15^\circ$$



۶۵

شعاع دایره‌ای که از راس‌های مثلث مقابل می‌گذرد رابه دست آورید.



تمرین

۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$) با ارتفاع $AH=h_a$ داریم:

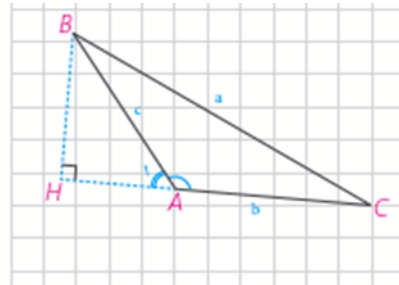
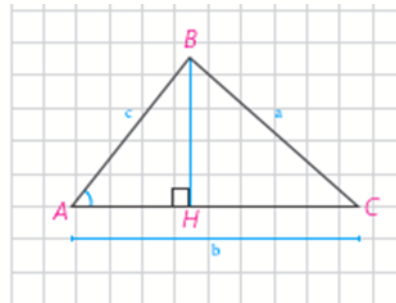
$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

۲- دو ایستگاه رادار، که در فاصله 20 کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های 30° و 45° درجه رصد کرده‌اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.

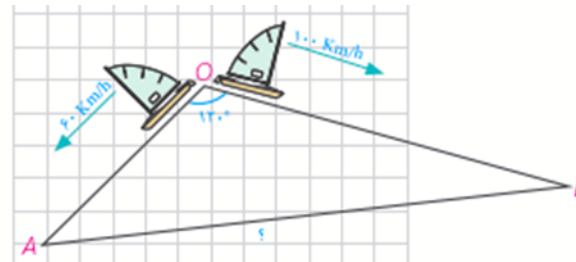
قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = \dots + \dots - \dots$$

$$c^2 = \dots + \dots - \dots$$



مثال: دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های 60 km/h و 100 km/h و با زاویه 120° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟



کاردرکلاس

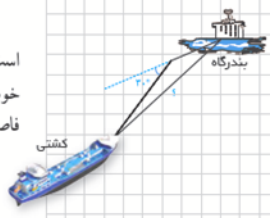
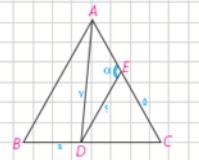
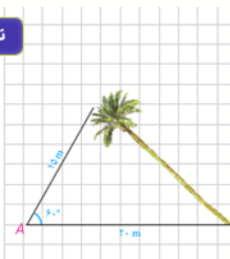
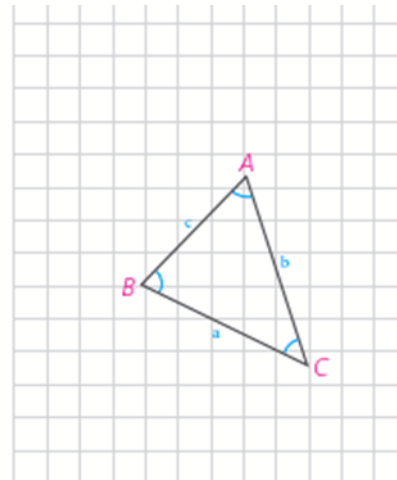
در مثلث ABC ، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 60^\circ$

۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس‌ها به دست آورید.

$$BC^2 = \dots^2 + \dots^2 - 2 \times \dots \times \dots \times \dots \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots + \dots - \dots \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots \text{ و } BC = \dots$$



تمرین

۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله 15 متری از نوک درخت است به زاویه 60° دیده می‌شود. اگر فاصله A تا پای درخت 20 متر باشد، مطلوب است:

(الف) طول درخت

(ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

(پ) فاصله نوک درخت از زمین

۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع AC واحد، نقطه D ، که به فاصله 7 واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ (نقطه E ، که به فاصله 5 واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟

۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت 60 کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت 40 کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

۴۷

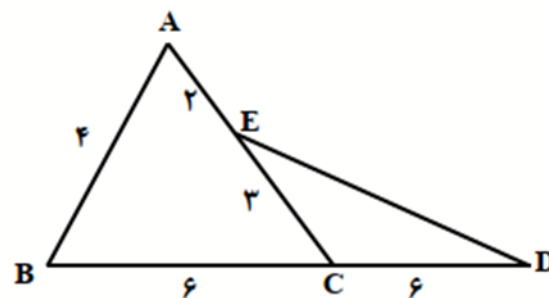
در شکل روبرو طول پاره خط DE ، چقدر است؟

(۱) $6\sqrt{2}$

(۲) $4\sqrt{2}$

(۴) $4\sqrt{3}$

(۳) $6\sqrt{3}$

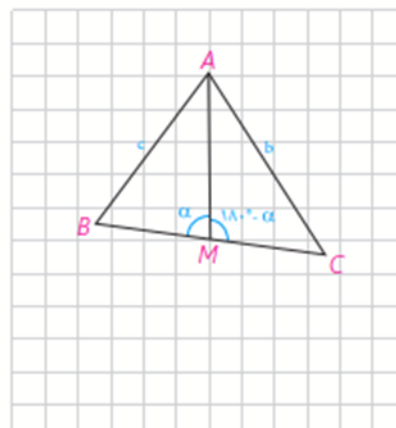
پویش علمی
ماندگارالبرز



پویش علمی
ماندگار البرز



پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز



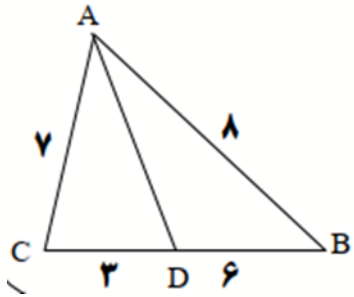
۴- در مثلث ABC ، میانه AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC ، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه‌ها})$$

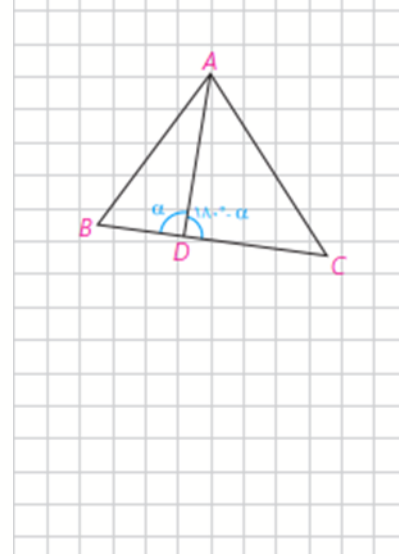
در حالت خاص $AB=4$ و $AC=6$ و $BC=8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.

مثلث ABC با اضلاع $AB=6$ ، $BC=5$ ، $AC=4$ مفروض است حاصل $m_b^2 - m_c^2$ چقدر است؟

در شکل روبرو، اندازه پاره خط AD کدام است؟



- (۱) $\sqrt{37}$
 (۲) ۶
 (۳) $2\sqrt{7}$
 (۴) $2\sqrt{10}$



۵- در مثلث ABC، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

(قضیه استوارت) $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$
 به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.



پویش علمی
ماندگار البرز



قضیه نیمسازهای زوایای داخلی
و محاسبه طول نیمسازها

قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

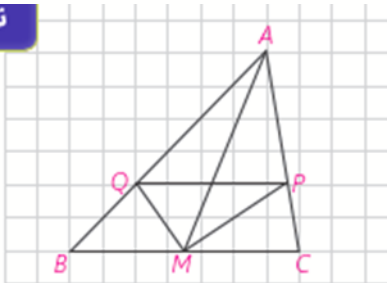
$$\text{حکم: } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

قضیه ۲: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

تمرین



۱- در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



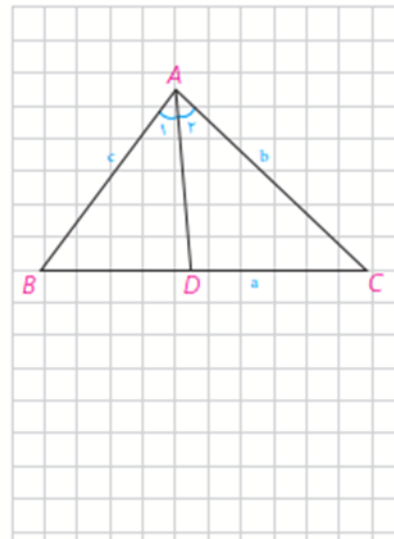
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A = AD \cdot \sin \frac{A}{2} (\dots + \dots)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2 AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow AD = \dots \Rightarrow d_a \text{ (نیمساز رأس } A) = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$



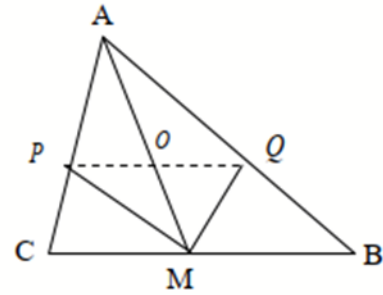
۵- در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویه \hat{A} است. با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.

در مثلث ABC میانه $AM = 5$ و $BC = 6$ نیمسازهای زوایای AMB ، AMC ضلع‌های AB و AC را در نقاط

P و Q قطع می‌کند. طول PQ کدام است؟

$$3/25 \quad (1) \quad 3/75 \quad (2)$$

$$3/5 \quad (2) \quad 4 \quad (4)$$



مثال: در مثلث ABC ، $AB=3$ ، $AC=5$ و $BC=7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.

حل: به کمک قضیه (۱) طول‌های BD و CD را به دست می‌آوریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{7}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow CD = \frac{35}{8}, \quad BD = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

حال با توجه به قضیه (۲) داریم:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3 \times 5 - \frac{35}{8} \times \frac{21}{8} =$$

$$15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$



پویش علمی
ماندگار البرز





قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

کاردکلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده‌است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید:

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$BD^2 = \dots + \dots = \dots + \dots = \dots \Rightarrow BD = \dots$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می‌آورید؟

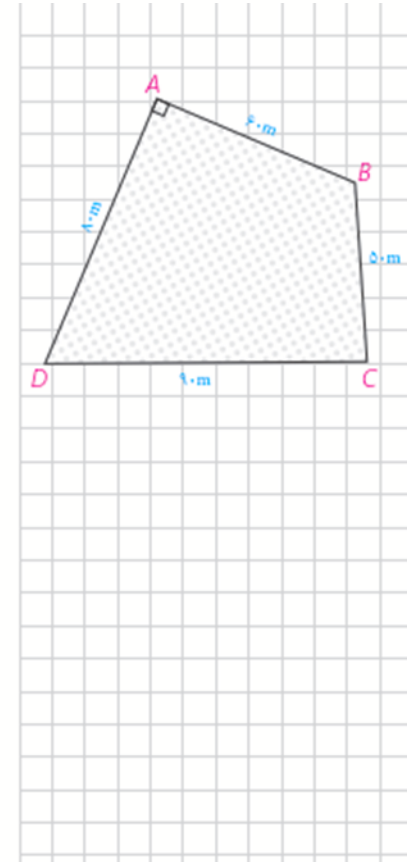
$$S_{ABD} = \frac{\dots \times \dots}{2} = \dots$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{\dots + \dots + \dots}{2} = \dots, S_{CBD} = \dots$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با:

$$S = \dots + \dots = \dots$$



مثال: مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با:

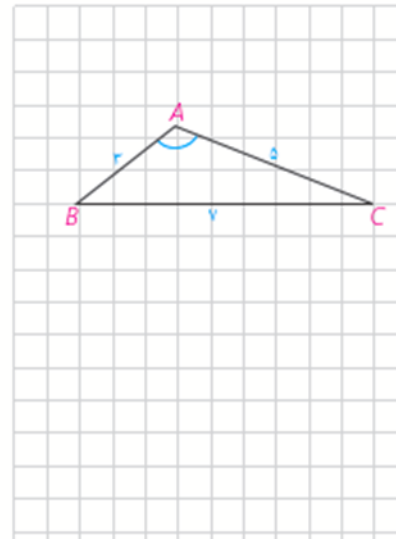
$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$s = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 2^4} = 84$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با:

$$h_a = \frac{2s}{a} = \frac{2 \times 84}{14} = 12, h_b = \dots, h_c = \dots$$

کاردکلاس



۱- مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \dots \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \dots$$

۲- مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ بنویسید.

۳- از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه \hat{A} را به دست آورید.



پویش علمی
ماندگار البرز





تمرین

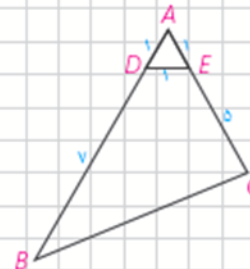
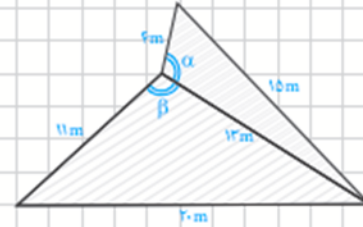


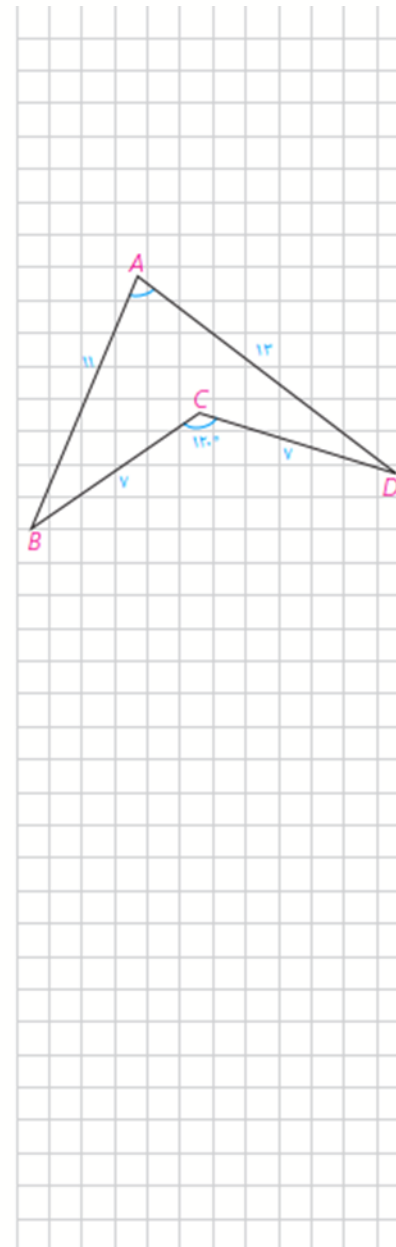
۱- در مثلث ABC ، $AB=10$ ، $AC=6$ و $\hat{A}=60^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

۲- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.
($\alpha=\beta$)

۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

۴- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.





$$b+c$$

۶- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

۷- در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.
راهنمایی: B را به D وصل کنید.

۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

۹- به کمک قضیه کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

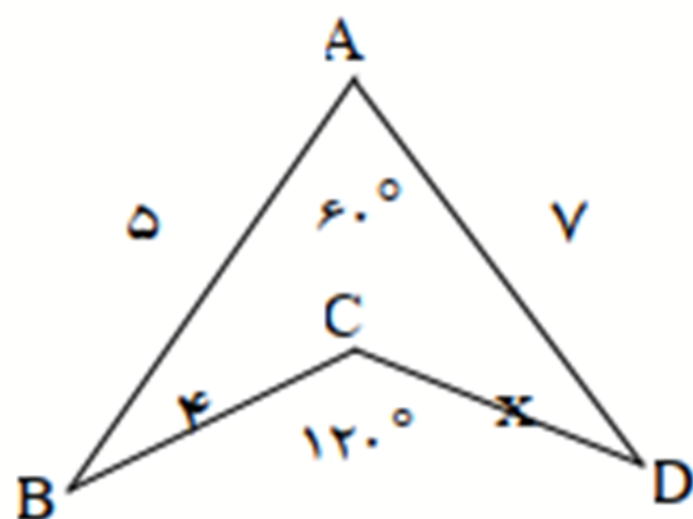
۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید :

الف) $AB=10$ ، $AC=6$ ، $BC=9$

ب) $AB=8$ ، $AC=4$ ، $BC=9$

پ) $AB=8$ ، $AC=15$ ، $BC=17$

در مثلث در شکل روبرو، مقدار $(X + 2)$ کدام است؟



پویش علمی
ماندگار البرز

